随机方程简介

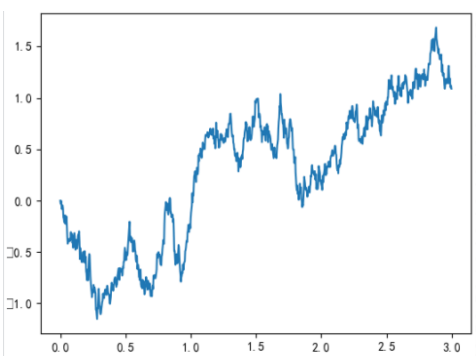
1 布朗运动$W(t)$

- 是随机的，不是确定的
- （几乎）每一条路径样本都是随时间连续变化，但不是光滑的：（几乎）每一个$W(t)$ 的样本都是t 的连续函数，但$W(t)$ 没有传统意义上的导数。
- $W(t_2) - W(t_1) \sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$
- 对任意的$t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, $W(t_4) - W(t_3)$ 和$W(t_2) - W(t_1)$ 都是独立的随机变量。

2 数值模拟

2.1 布朗运动的数值模拟

在每个时间步生成一个独立的高斯变量$\Delta W \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$，然后令$W(t + \Delta t) = W(t) + \Delta W$。




```
import numpy as np
t=3
n=1000
dt = t/n
t = np.arange(n)*dt
W = np.zeros(n)
for i in range(n-1):
    W[i+1] = W[i] + np.sqrt(dt)*np.random.randn(1)

plt.plot(t, W)
plt.show()
```

2.2 $dx = f(x)dt + g(x)dW$ 的数值模拟

在每一个时间步，先生成一个独立随机数$\Delta W \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$, 然后令$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x)\Delta t + g(x)\Delta W$.

3 复合随机过程

问题：假如随机变量y 满足

$$dy = f(t, y)dt + g(t, y)dW \tag{1}$$

并且$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，那么$F(t, y)$ 满足什么方程?

3.1 Ito 引理: $(dW)^2 = dt$

$(dW)^2 = dt$ 是一个形式写法。其原因在于下面的结论:

定理**3.1.** 令W 表示一个发生在时间$[0,t]$ 中的布朗运动。对每一个n, $\{t_i : 0 \le i \le n\}$ 表示区间$[0,t]$ 的一个等度划分: $t_i = \frac{i}{n}t$, $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$。

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2\Big] = t \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var\Big[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2\Big] = \lim_{n\to\infty} Var\Big[\sum_{i=1}^{n}(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2\Big] = 0 \tag{3}$$

用微积分符号写出来就是:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t (dW)^2\Big] = t \tag{4}$$

$$Var\Big[\int_0^t (dW)^2\Big] = 0 \tag{5}$$

因此$(dW)^2$ 可以等价地看成确定过程的无穷小量dt，而非随机过程的无穷小量。

证明*(定理3.1):* 直接计算

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2\Big] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}((\Delta W_i)^2) = \sum_{i=1}^{n} Var(\Delta W_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{t}{n} = t \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
Var\Big[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[(\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2)^2\Big] - \Big(\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2]\Big)^2 && (7)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}[(\Delta W_i)^2(\Delta W_j)^2] - t^2 && (8)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(\Delta W_i)^4] + \sum_{i\neq j}\mathbb{E}((\Delta W_i)^2)\mathbb{E}((\Delta W_j)^2) - t^2 && (9)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 3(\Delta t)^2 + n(n-1)(\Delta t)^2 - t^2 && (10)\\
&= \frac{n(n+2)}{n^2}t^2 - t^2 && (11)\\
&= \frac{2}{n}t^2 && (12)
\end{aligned}$$

□

3.2 Ito 公式

定理**3.2.** 假如随机变量y 分别满足

$$dy = f(t,y)dt + g(t,y)dW \tag{13}$$

并且$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个光滑函数，那么$u=F(t,y)$ 满足:

$$du=(F_t+F_yf+\frac{1}{2}F_{yy}g^2(t,y))dt+F_ygdW \tag{14}$$

不严格证明*(定理3.2)*: 记$t_2=t+\Delta t$, $t_1=t$，$y_1=y(t_1), y_2=y(t_2), \Delta y=y_2-y_1$, 利用泰勒展开:

$$F(t_2,y_2)-F(t_1,y_1)=F(t_2,y_2)-F(t_1,y_2)+F(t_1,y_2)-F(t_1,y_1) \tag{15}$$

$$=F_t(t_1,y_2)\Delta t+o(\Delta t)+F_y(t_1,y_1)\Delta y+\frac{1}{2}F_{yy}(t_1,y_1)(\Delta y)^2+o((\Delta y)^2) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}=&F_t(t_1,y_1)\Delta t+\Big[F_t(t_1,y_2)-F_t(t_1,y_1)\Big]\Delta t+o(\Delta t)+F_y(t_1,y_1)f(t_1,y_1)\Delta t\\&+F_y(t_1,y_1)g(t_1,y_1)\Delta W+\frac{1}{2}F_{yy}(t_1,y_1)[f(t_1,y_1)\Delta t+g(t_1,y_1)\Delta W]^2+o((\Delta y)^2)\end{aligned} \tag{17}$$

注意

- $\Big[F_t(t_1,y_2)-F_t(t_1,y_1)\Big]\Delta t=o(\Delta t)$
- $(\Delta y)^2=[f(t_1,y_1)\Delta t+g(t_1,y_1)\Delta W]^2=g^2(\Delta W)^2+o(\Delta t)=g(t_1,y_1)^2\Delta t+o(\Delta t)$

因此

$$u(t_2)-u(t_1)=(F_t+F_yf+\frac{1}{2}F_{yy}g^2)\Delta t+F_yg\Delta W \tag{18}$$

□

4 解的存在性和唯一性

假如随机常微分方程

$$dx=f(t,x)dt+g(t,x)dW \tag{19}$$

中的f,g 满足*Lipschitz* 条件，即存在连续函数$M(t)$, 使得对任意的x,y 都满足$|f(t,x)-f(t,y)|+|g(t,x)-g(t,y)|\leq M(t)|x-y|$，则对于每一个给定的初值以及几乎每一个随机过程样本W ，此方程的解都存在且唯一。

5 多元随机微分方程

问题：如何定义多元函数随机过程$y:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$，使得对任意固定的$t$, $y(t,x)$ 是关于x 的光滑函数?

- 如果对每个$x_0\in\mathbb{R}^n$，单独定义随机过程$y(t,x_0)$，则经过任意短时间后，$y(t,x)$ 将失去对x 的光滑性。
- 对不同的点$x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，$y(t,x_1)$ 和$y(t,x_2)$ 的随机性必须是相关的。

因此考虑如下形式的随机方程:

$$dy(t,x) = F(t,x,y)dt + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(t,y)\xi_i(t,x,y)dW_i \tag{20}$$

其中$\mathbb{E}(W_i(t)W_j(t)) = \delta_{ij}t$, F, σ_i, ξ_i 都是“光滑”函数，$F(t,x,y), \xi_i(t,x,y) \in \mathbb{R}^m$, $\sigma_i(t,y) \in \mathbb{R}^+$，且对任意给定的$t, y$,

$$\int_x \xi_i^\top(t,x,y)\xi_j(t,x,y)d^n x = \delta_{ij} \tag{21}$$

此时y 的光滑性由ξ_i 的光滑性以及σ_i 的递减速度决定。

作业**5.1.** 假设x 满足随机常微分方程

$$dx = -xdt + tdW \tag{22}$$
$$x(0) = 0 \tag{23}$$

(1),写出$y = x^3$ 满足的随机常微分方程，使其只含有y, 不包含x *(*即$dy = f(t,y)dt + g(t,y)dW$ 的形式*)*

(2),使用*Python* 模拟x *10000*次，计算随机变量$y(1)$ 的样本均值和样本方差;

(3),通过直接模拟y 所满足的常微分方程，计算*10000*个样本，及$y(1)$ 的样本均值和样本协方差。比较*(2)* 和*(3)* 数值结果的差异。